

## RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y USO DE TECNOLOGÍAS DIGITALES EN UN MOOC: DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN

### PROBLEM SOLVING AND THE USE OF DIGITAL TECHNOLOGIES IN A MOOC: DESIGN AND IMPLEMENTATION

William E. Poveda Fernández  
Cinvestav  
wpoveda@cinvestav.mx

Daniel A. Aguilar-Magallón  
Cinvestav  
daguilar@cinvestav.mx

Adrián Gómez-Arciga  
Cinvestav  
agomez@cinvestav.mx

*En este estudio se analizan y discuten los elementos del diseño y resultados de la implementación de un curso masivo abierto en línea (MOOC) que promueve la resolución de problemas basado en el uso de tecnología digital. Los resultados muestran que el diseño de las actividades, la intervención del equipo de diseño del MOOC en los foros de discusión y la interacción entre los participantes permitió y favoreció la creación de un ambiente de colaboración en la resolución de problemas. Los participantes compartieron y discutieron sus ideas matemáticas como parte de una comunidad virtual de aprendizaje, lo que les permitió formular conjeturas, explorar y buscar propiedades para sustentar relaciones y comunicar resultados.*

Palabras clave: Resolución de Problemas, Tecnología.

#### Introducción

Durante o después de sus clases, es común que los estudiantes consulten diversas plataformas digitales en Internet para acceder a información sobre contenidos disciplinarios, compartir y discutir ideas, tomar cursos especializados en algún tema e interactuar con expertos. Así, los espacios y tiempos en los que se produce aprendizaje han cambiado y han sido alterados por la conectividad en la red (Gros, 2016).

Diversas universidades han puesto a disposición del público general, Cursos Masivos Abiertos en Línea (*Massive Open Online Course*, MOOC por sus siglas en inglés) a través de diversas plataformas digitales. La comunidad virtual que participa en estos cursos comprende un conjunto grande (generalmente miles) de personas con diferentes niveles de estudios, edad, dominio o conocimiento previo de la materia, entre otros. En el desarrollo de las actividades de un MOOC no existe un profesor encargado de responder o dar seguimiento puntual a cada participante. Cada integrante define su grado de compromiso y participación en las actividades. Para este estudio, se construyó el MOOC: Resolución de Problemas Matemáticos y uso de Tecnologías Digitales, basado en los marcos: resolución de problemas (Santos-Trigo, 2014) y RASE (Churchill, King, & Fox Churchill, 2016). Churchill, et al., (2016) argumentan que un ambiente de aprendizaje en línea debe incluir elementos que permitan a sus participantes trabajar y colaborar en equipo con otros. Las actividades deben fomentar la participación activa de los estudiantes en un ambiente de reflexión, de discusión y centrarse en un contexto donde las tareas involucren a los estudiantes en los episodios de resolución de problemas: formulación de preguntas, búsqueda de diversos métodos de solución, exploración de diferentes representaciones, búsqueda de patrones, variantes y relaciones entre objetos matemáticos, presentación de argumentos, comunicación de resultados, planteamiento de preguntas y formulación de nuevos problemas (Santos-Trigo, 2014). El uso sistemático de tecnologías

digitales resulta importante en la representación, exploración, comunicación y comprensión de conceptos matemáticos en la resolución de problemas (Santos-Trigo, Moreno-Armella, 2016).

En este estudio interesó analizar el diseño de las actividades matemáticas y la formas de razonamiento de los participantes relacionado con: (1) el planteamiento de preguntas y la búsqueda de diversas maneras de responderlas; (2) la formulación de conjeturas basadas en el movimiento de objetos matemáticos y la cuantificación de atributos como medida de segmentos, ángulos, áreas, etc.; y (3) la búsqueda de argumentos que validen esas conjeturas transitando desde los argumentos empíricos y visuales hasta la construcción de argumentos geométricos y algebraicos. Así, la pregunta de investigación que sirvió de guía para el desarrollo de este estudio fue ¿De qué manera el diseño e implementación de las actividades en un MOOC basado en resolución de problemas y uso coordinado de tecnologías digitales influye en la construcción y el desarrollo del pensamiento matemático de los participantes?

### Marco Conceptual

La construcción del pensamiento matemático está relacionada con la resolución de problemas ya que es un medio que permite identificar, explorar, probar y comunicar las estrategias de solución (Santos-Trigo, 2014; Schoenfeld, 1992). Diversas tecnologías digitales ofrecen a los estudiantes diversos caminos para representar y explorar conceptos y problemas matemáticos que extienden aquellos acercamientos basados en el uso de lápiz y papel (Santos-Trigo, 2014; Aguilar-Magallón & Poveda, 2017).

Un Sistema de Geometría Dinámica (SGD) puede utilizarse para integrar los procesos que intervienen en la resolución de problemas ya que permite generar representaciones o modelos dinámicos de los problemas matemáticos donde el movimiento de objetos particulares (puntos, rectas, segmentos, polígonos, etc.) puede ser explorado y explicado en términos de relaciones matemáticas. Así, el uso sistemático de tecnologías digitales resulta importante en la representación, exploración, comunicación y comprensión de conceptos matemáticos en la resolución de problemas.

Churchill et al. (2016) argumentan que se necesita un modelo para el diseño de ambientes de aprendizaje que proporcione, a profesores e investigadores, pautas para utilizar tecnologías digitales en el contexto de la enseñanza y aprendizaje. Proponen el modelo de diseño RASE que integra Recursos, Actividades, Soporte y Evaluación. Los Recursos, se refieren a los materiales disponibles para los estudiantes: videos, imágenes, documentos digitales, calculadoras, herramientas para la representación de situaciones matemáticas, etc. Las Actividades deben permitir a los estudiantes involucrarse en procesos de discusión, análisis y reflexión en colaboración con otros.

El Soporte establece que se deben incluir diversos medios de consulta y comunicación entre los estudiantes con el objetivo de que puedan obtener ayuda o retroalimentación en el momento en que lo necesiten y, así, fomentar su independencia del profesor o tutor. La evaluación debe favorecer que los estudiantes mejoren constantemente su aprendizaje, por ello, es necesario que cuando expresen sus ideas, analicen la retroalimentación recibida, a través de los medios de soporte, para refinar o ampliar los conceptos o ideas iniciales.

En un MOOC, los foros de discusión se convierten en un medio de conversación entre sus participantes y les ofrece la oportunidad de plantear, aclarar, conocer, contrastar ideas propias y de otros (Poveda & Aguilar-Magallón, 2017). Ernest (2016) argumenta que en la conversación intervienen: un hablante/proponente, un oyente/crítico y un Texto Matemático. El hablante/proponente plantea una idea (Texto Matemático) y el oyente/crítico responde

proporcionando su punto de vista, aceptando o modificando la idea original. Posteriormente, el hablante/proponente puede asumir el rol de oyente/crítico, de esta manera, se alternan sus roles.

### Metodología

El objetivo del diseño de las actividades del curso fue enfatizar que el aprendizaje de las matemáticas requiere problematizar o cuestionar las tareas o situaciones, pensar distintas maneras de resolver un problema, comprender y utilizar diversas representaciones, interpretar la solución y comunicar los resultados. Mediante este proceso, la formulación de preguntas se convierte en un medio que permiten a los participantes construir, desarrollar, refinar, o transformar sus formas de comprender y resolver problemas.

Los Recursos incluyeron representaciones o modelos dinámicos de problemas construidos en GeoGebra, vínculos a la plataforma Wikipedia y videos de KhanAcademy para el estudio y consulta de conceptos o relaciones matemáticas. Las Actividades comprendieron tres etapas: 1) *Movimiento*: los participantes tuvieron la oportunidad de explorar un modelo dinámico que representa un problema y explorar el comportamiento de algunos de sus objetos que resulta al mover otros elementos, 2) *Conjetura*: el objetivo es que, a partir del movimiento, los participantes formularan conjeturas que puedan ser sustentadas o refutadas a partir de argumentos visuales o empíricos y 3) *Justificación*: se buscó que toda conjetura fuera justificada mediante argumentos que involucraran propiedades y resultados matemáticos.

Se utilizó el foro de discusión para que los participantes tuvieran la posibilidad de plantear sus dudas e ideas las veces que consideraran necesarias. Así, el trabajo de los integrantes puede ser un punto de referencia para que otros retomen o extiendan las ideas, las contrasten y las discutan. Además, en los foros de discusión los participantes pueden recibir retroalimentación acerca de las ideas que plantean, esto puede favorecer el análisis y reflexión como parte del proceso de Evaluación.

### Implementación del MOOC, sus participantes y procedimientos

El MOOC se construyó e implementó en la plataforma *Open edx* (<https://open.edx.org/about-open-edx>), tuvo una duración de siete semanas y estuvo compuesto por cinco Actividades. El requisito fue estar cursando o haber terminado estudios del nivel K-12. Participaron 2669 personas. Al inicio del curso, únicamente estuvo visible la Actividad 1, una semana después se mostraba la Actividad 2 y así sucesivamente, sin restringir el acceso a las anteriores. Durante las siete semanas en que el curso estuvo disponible a los participantes, el equipo de diseño (ED) monitoreó el desarrollo de las Actividades y la participación en los foros. El trabajo consistió en lo siguiente:

1. Al inicio de la Actividad (primer y segundo día), clasificó los comentarios en cuatro categorías: respuestas a las preguntas que planteaba cada Actividad, acercamientos hacia la solución del problema (correctos e incorrectos), nuevas preguntas planteadas por los integrantes y propuestas para extender el problema. Posteriormente, se eliminaron los comentarios con ideas similares; se tomaron dos o tres de cada categoría y fueron colocados de tal forma que se mostraran al inicio de las conversaciones, así los participantes les podrían dar prioridad en su análisis.
2. Durante la Actividad intervenía en los foros solo cuando se requería orientar y extender la discusión. Nunca se respondía de manera directa a las preguntas de los participantes, sino que, se planteaban preguntas con el objetivo de generar discusión y que ellos mismos buscaran diferentes formas de solucionar la situación.

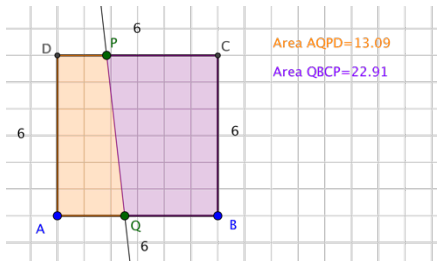
3. Al final de la Actividad se plantearon preguntas para promover la ampliación del tema y que los participantes buscaran extender los problemas iniciales.

Los datos de este estudio se recolectaron por medio de los foros de discusión. La unidad de análisis fueron las conversaciones de los participantes en cada Actividad. Al finalizar el curso, el equipo de diseño analizó y documentó cómo el diseño de las Actividades, la discusión e interacción entre los participantes y las acciones que tomó el equipo de diseño en el foro influyeron en el desarrollo de los episodios de resolución de problemas, según el marco de resolución de problemas y uso de tecnologías digitales de Santos-Trigo (2014).

### Presentación de Resultados

Se discute una de las Actividades propuestas en el MOOC: Dos granjeros desean sembrar un terreno que tiene forma de un cuadrado. ¿Cómo dividir el terreno para que cada granjero siembre exactamente la misma área? La Actividad consistió desarrollar dos soluciones del problema, en cada una se proporcionó un modelo dinámico y un conjunto de preguntas para guiar el trabajo de los participantes. La Tabla 1 muestra la etapa en donde los integrantes del MOOC tuvieron la oportunidad de mover objetos en búsqueda de relaciones o invariantes y un resumen de las conversaciones en el foro.

**Tabla 1: El movimiento y los primeros resultados de la exploración dinámica.**

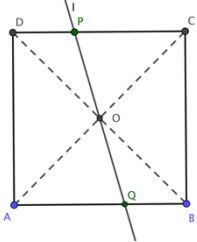
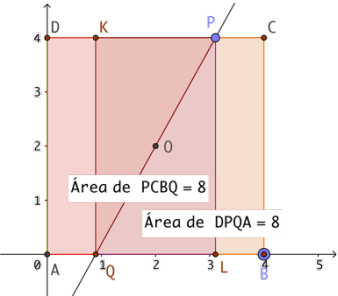
El movimiento y la exploración	Resultados de las interacciones en los foros
 <p><b>Movimiento:</b> Al mover los puntos A, B, P y Q ¿Qué ocurre con las áreas de las regiones? ¿Dónde situar los puntos P y Q para que las áreas de las regiones AQP y QBCP sean las mismas?</p>	<p>Todos los participantes:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Coincidieron que, al mover los puntos P y Q, es posible obtener regiones de áreas iguales, sin importar la medida del lado del cuadrado.</li> <li>2. Se basaron en el movimiento de objetos y la medición de áreas para determinar algunas soluciones: <math>P = C</math> y <math>Q = A</math>; <math>P = D</math> y <math>Q = B</math>; y <math>PQ</math> mediatriz de <math>DC</math>.</li> </ol> <p>En esta parte de la Actividad, los participantes no lograron observar que una solución general es cuando <math>PQ</math> pasa por el centro del cuadrado.</p>

La siguiente pregunta que se planteó a los participantes fue: ¿Resulta importante el centro del cuadrado y la posición de la recta que divide al terreno en regiones de la misma área? Todos formularon su primera conjetura basada en argumentos visuales y empíricos (mediciones de las áreas de AQP y QBCP): “Si la recta  $PQ$  pasa por el centro del cuadrado  $ABCD$  entonces lo divide en dos áreas iguales”. El ED cuestionó: “¿Cuántas soluciones existen?” Las respuestas coincidieron en que existe un número infinito de soluciones.

En la búsqueda de una justificación de la conjetura, se cuestionó a los participantes: ¿Qué conceptos, propiedades y recursos matemáticos se pueden usar para sustentar la conjetura? Todos coincidieron, en las conversaciones, en que era necesario trazar las diagonales del cuadrado y utilizar sus propiedades (Justificación 1 de la Tabla 2).

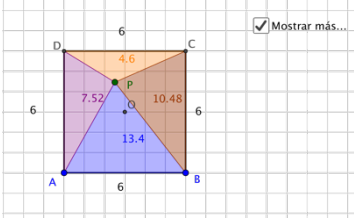
El participante  $P_1$  presentó otra forma de justificar la conjetura: construyó un modelo dinámico, planteó sus ideas, contestó las dudas de otros y proporcionó retroalimentación a los que decían no comprender la justificación (Justificación 2, Tabla 2).

**Tabla 2: Recursos y estrategias de exploración y solución.**

Justificaciones	Recursos y estrategias de exploración y solución
<b>Justificación 1</b> 	<b>Recursos:</b> Propiedades del cuadrado y sus diagonales, ángulos entre paralelas, ángulos opuestos por el vértice y congruencia de triángulos. <b>Estrategia:</b> Colocar un punto móvil $P$ sobre el lado $DC$ , construir la recta $PO$ y trazar las diagonales del cuadrado. <b>Justificación:</b> $\triangle DOP \cong \triangle BOQ$ (ALA), así $DP = BQ$ , por lo tanto, los trapecios $AQPD$ y $QBCP$ son congruentes y tienen área igual.
<b>Justificación 2 de <math>P_1</math></b> 	<b>Recursos:</b> Propiedades del cuadrado, congruencia de triángulos, ángulos entre paralelas, propiedades de rectas paralelas y perpendiculares. <b>Estrategia:</b> Colocar el punto móvil $P$ sobre $DC$ , trazar la recta $PO$ y construir rectas perpendiculares a $DC$ y $AB$ que pasan por $P$ y $Q$ , respectivamente. <b>Justificación:</b> $\triangle QKP \cong \triangle PLQ$ (LAL) y los rectángulos $AQKD$ y $LBCP$ son congruentes (no proporciona argumentos). Preguntas de los participantes en el foro: (1) ¿Qué sucede si $P=C$ y $Q=A$ ? $P_1$ : “Se tienen dos triángulos rectángulos congruentes”, (2) “¿Cómo sabes que $AQ=PC$ ?”. $P_1$ hizo referencia a la Justificación 1.

La siguiente parte de la Actividad guio a los participantes en la exploración y búsqueda de otra solución, los detalles se muestran en la Tabla 3.

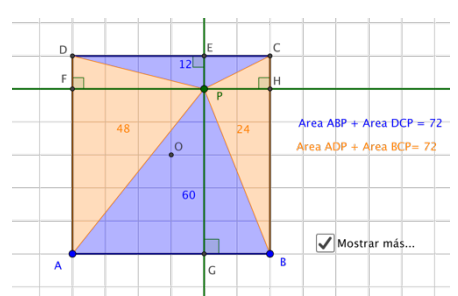
**Tabla 3: La importancia del movimiento y la exploración.**

Etapas de la Actividad	Interacciones en los foros
 <p><math>P</math> es un punto móvil dentro del cuadrado.</p> <p><b>Movimiento.</b> ¿Qué regiones se les puede asignar a los grajeros para que cada uno siempre la misma área?</p>	<p>Los participantes coincidieron en que:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Al mover <math>P</math> se pueden obtener las soluciones cuando: <math>P</math> coincide con alguno de los vértices, <math>P</math> es el punto medio de un lado o <math>P</math> es el centro del cuadrado.</li> <li>Otra solución es cuando <math>P</math> pertenece a una de las diagonales del cuadrado o a la recta que une los puntos medios de <math>AB</math> y <math>DC</math>.</li> </ul> <p>Luego de las conclusiones anteriores, un participante mencionó que la suma de las áreas de los triángulos <math>ABP</math> y <math>CDP</math> se mantiene constante e igual a la mitad del área del cuadrado. Los demás estuvieron de acuerdo y afirmaron que no habían visto dicha invariante.</p>

<b>Conjetura:</b> ¿Al variar la posición del punto $P$ , qué ocurre con la suma de las áreas de los triángulos $ABP$ y $CDP$ ?	Los participantes formularon la conjetura: “Si $P$ es un punto que está dentro del cuadrado, la suma de las áreas de los triángulos opuestos es la mitad del área del cuadrado $ABCD$ ”. Retroalimentación: “Al mover $P$ se forman 4 triángulos”, respuestas: “Mueve el punto $P$ de tal forma que coincida con un vértice, o bien, coloca $P$ sobre sobre uno de los lados”.
--	--

Luego de que los integrantes formularon la conjetura, la siguiente parte consistió en buscar relaciones matemáticas para justificarla, por ello, se incluyó, en el modelo dinámico del cuadrado, las rectas  $FH$  y  $EG$ . Los participantes discurtieron y presentaron la Justificación 1 que muestra la Tabla 4. La Justificación 2 de la Tabla 4 fue construida y compartida por el participante  $P_2$ . Los demás aprobaron las ideas y construyeron modelos algebraicos como otra ruta para sustentarlo.

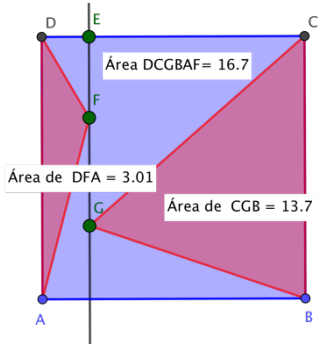
**Tabla 4: Recursos y estrategias de exploración y solución.**

Justificación de la Solución 2	Recursos, estrategias y justificación
 <p>¿Qué propiedades son importantes para presentar un argumento que sustente la conjetura? ¿Qué propiedades tienen los triángulos que se generan al trazar las rectas perpendiculares a los lados que pasan por el punto <math>P</math>?</p>	<p><b>Recursos:</b> Propiedades de rectas paralelas y perpendiculares, triángulos rectángulos congruentes</p> <p><b>Estrategia 1:</b> Trazar las rectas <math>EG</math> y <math>FH</math> perpendiculares a los lados del cuadrado que pasan por <math>P</math>.</p> <p><b>Justificación 1.</b> <math>\triangle AGP \cong \triangle AFP</math> (LLL) y <math>\triangle GBP \cong \triangle HBP</math> (LLL), del mismo modo <math>\triangle CEP \cong \triangle CHP</math> y <math>\triangle EDP \cong \triangle FDP</math>. Por lo tanto, <math>Area \triangle DCP + Area \triangle ABP = Area \triangle BCP + Area \triangle DPA</math>.</p> <p><b>Estrategia de <math>P_2</math>.</b> La suma de las alturas de <math>\triangle AGP</math> y <math>\triangle ADPE</math>, sin importar la posición de <math>P</math>, es constante e igual a <math>BC</math>.</p> <p><b>Justificación de <math>P_2</math>:</b> La suma de las alturas de <math>\triangle PCD</math> y <math>\triangle ABP</math> es igual a la suma de las alturas de <math>\triangle DAP</math> y <math>\triangle BCP</math>, además, los 4 triángulos tienen la misma base, por lo tanto, <math>Area \triangle PCD + Area \triangle ABP = Area \triangle DAP + Area \triangle BCP</math>.</p>

El ED cuestionó en el foro: “¿Existe otra forma de solucionar el problema? ¿Qué otras preguntas se pueden plantear?”. El participante  $P_3$  retomó las ideas  $P_2$  (Justificación 2 de la Tabla 4) y construyó un modelo dinámico del cuadrado con otra solución (Justificación 1 de la Tabla 5). Los demás participantes aprobaron las ideas de  $P_3$  y discutieron otra forma de sustentar la conjetura (Justificación 2, Tabla 5). Todos los participantes validaron las ideas expuestas y proporcionaron ayuda a otros.

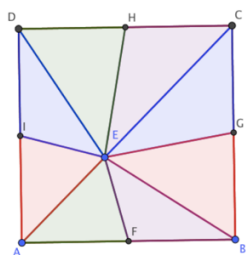


Tabla 5: Otra solución del problema.

Otra solución	Recursos, estrategias y justificación
	<p><b>Recursos:</b> Propiedades de rectas paralelas y perpendiculares.</p> <p><b>Estrategia:</b> Colocar un punto móvil <math>E</math> sobre <math>DC</math>, trazar la recta <math>m</math> perpendicular a <math>DC</math> que pasa por <math>E</math>. Colocar dos puntos móviles <math>F</math> y <math>G</math> sobre <math>m</math>.</p> <p><b>Justificación 1 de <math>P_3</math>:</b> La suma de las alturas de <math>\triangle AFD</math> y <math>\triangle BCG</math> es constante e igual a <math>AB</math> sin importar la posición de <math>E, F</math> y <math>G</math>, por lo tanto, <math>Area \triangle AFD + Area \triangle BCG</math> es la mitad del área del cuadrado.</p> <p><b>Justificación de otros participantes:</b> Trazar rectas paralelas a los lados que pasan por los puntos móviles para obtener triángulos congruentes.</p>

La Tabla 6 muestra dos de las preguntas que formularon los participantes y las respuestas que encontraron.

Tabla 6: Nuevos problemas planteados por los participantes.

Preguntas formuladas	Justificación
<p><b>Extensión 1</b></p> <p><i>“¿Cómo dividir el terreno en 4 regiones con la misma área?”.</i></p> <p><small>Muy interesante la forma de resolverlo, se me ocurrió la forma de dividir el cuadrado en 4 áreas iguales trazando la mediana de cada triángulo.</small></p>  <p><small>Al sumar las áreas de</small></p> <p><small>los triángulos de igual color se obtiene la división del terreno en 4 áreas iguales. Usé la propiedad de la mediana que garantiza que divide al triángulo en dos áreas iguales. ¿que opinan?</small></p>	<p>En la búsqueda de respuestas, un participante utilizó la propiedad: Al trazar una mediana de un triángulo, éste queda dividido en dos áreas iguales. Así, construyó y presentó un modelo dinámico similar al de la Solución 2 y en donde trazó la mediana de cada triángulo (<math>EI</math>, <math>EH</math>, <math>EG</math> y <math>EF</math>). Al sumar las áreas de los triángulos <math>DEI</math> y <math>CGE</math>, se obtiene que su valor es un cuarto del área del cuadrado.</p> <p>Los demás participantes en la conversación estuvieron de acuerdo con las ideas y recalcaron el uso de un SGD en la exploración y búsqueda de soluciones.</p>
<p><b>Extensión 2</b></p> <p><i>“¿Será posible determinar un cuadrilátero inscrito dentro de cualquier otro tal que sea la mitad de su área?”.</i></p>	<p>Otro participante compartió información de Wikipedia relacionada con el teorema de Varignon: En cualquier cuadrilátero, los puntos medios de los lados forman un paralelogramo cuya área es la mitad de la del cuadrilátero original.</p>

### Discusión de los resultados

El diseño de las Actividades guio el trabajo de los participantes hacia la búsqueda de diversas formas de explorar los modelos dinámicos. Cada modelo representó para los participantes un punto de partida que les permitió identificar conceptos, plantear conjeturas basadas en el

movimiento de los objetos matemáticos presentes en la configuración dinámica y sus relaciones o invariantes. El uso de los foros de discusión favoreció la comunicación, análisis y contraste de ideas matemáticas, además permitió a los participantes proporcionar u obtener retroalimentación de otros. Lo anterior fue importante para que transitaran de soluciones visuales y empíricas (asociadas con el uso de las herramientas como movimiento de objetos dentro de la configuración, la cuantificación de atributos como medida de segmentos, ángulos, áreas, etc.) hacia la presentación de argumentos geométricos y algebraicos en la validación de las conjeturas formuladas.

Durante el desarrollo del curso, el monitoreo que realizó el ED en la clasificación y la jerarquización de los comentarios favoreció la discusión, refinamiento de conceptos e ideas matemáticas y los episodios de la resolución de problemas. Por ejemplo, los participantes formularon conjeturas, presentaron argumentos para justificarlas y formularon nuevos problemas. El planteamiento de preguntas que presentó el ED fomentó la discusión de las ideas matemáticas, la formulación de nuevas soluciones y extensiones del problema (Ver Tabla 2, 5 y 6).

Algunas personas participaron en el foro asumiendo el rol específico de proporcionar retroalimentación a las preguntas de otros, esto, junto con el diseño de las actividades, promovió el trabajo colaborativo y fomentó la independencia de los participantes en el proceso de la construcción y su desarrollo del pensamiento matemático.

### Conclusiones

Los resultados muestran que las diversas tecnologías digitales utilizadas en este estudio y la integración de los componentes Recursos, Actividades, Soporte y Evaluación basados en la resolución de problemas permitieron crear un ambiente de trabajo colaborativo. La plataforma digital permitió incluir representaciones dinámicas de los problemas elaboradas en GeoGebra, en las cuales los participantes tuvieron la oportunidad de explorar, identificar conceptos, buscar conjeturas y diversos argumentos para sustentarlas. En este proceso, utilizaron estrategias asociadas con el uso de la herramienta como movimiento de objetos dentro de la configuración dinámica y la cuantificación de sus atributos (longitudes y áreas).

Durante el desarrollo de las Actividades, un grupo de participantes proporcionó retroalimentación a otros, lo que favoreció aclarar o refinar dudas o ideas relacionadas con conceptos matemáticos, con la exploración del modelo dinámico, con la formulación de conjeturas y su justificación. Lo anterior permitió a los participantes avanzar en el desarrollo y comprensión de las Actividades en forma colaborativa y sin depender de un tutor.

Las acciones que tomó el ED en sus intervenciones en los foros expandieron las discusiones en tres direcciones: (1) favorecieron la creación de grupos de trabajo donde se discutían los diferentes episodios de la resolución de problemas, (2) dirigieron las discusiones y fomentaron la comprensión de conceptos e ideas matemáticas y (3) permitieron a los participantes formular preguntas y buscar respuestas, esto los llevó a plantear nuevas soluciones y extensiones al problema. Es importante reconocer que durante la etapa del diseño y la implementación de un MOOC se debe buscar que los participantes creen la conciencia de que ellos mismos monitoreen sus avances en la comprensión y uso de las ideas matemáticas en la resolución de problemas.

Un factor por considerar en el trabajo a futuro es la posibilidad de que los participantes construyan y presenten sus propios modelos dinámicos de los problemas, ya que, en este estudio, pese a que no se solicitó explícitamente, algunos construyeron y compartieron sus construcciones dinámicas fomentando la discusión de ideas, las formas de resolver y extender el problema.



*In this study, the elements of the design and results of the implementation of a Massive Open Online Course (MOOC) based on the problem solving and the use of digital technology are analyzed and discussed. The results show that the design of the activities, the intervention of the MOOC design team in the discussion forums and the interaction among the participants allowed and favored the creation of a collaborative environment in problem solving. Participants shared and discussed their mathematical ideas, as part of a virtual learning community, which allowed them to formulate conjectures, explore and search properties to sustain relationships, and communicate results.*

Key Words: Problem Solving, Technology.

### Introduction

During and after their lessons, it is common for the students to use different digital platforms on Internet to have access to information about disciplinary contents, share and discuss ideas, take specialized courses in a topic and interact with experts. The spaces and times in which the learning is developed have been changed and altered by the connectivity of the network (Gros, 2016). Some universities have made available to the general public Massive Open Online Courses through different digital platforms. The virtual community that participates in these courses comprises a large group (usually thousands) of people with different levels of studies, age, domain or prior knowledge of the subject, among others. In the development of the activities of a MOOC there is not a professor in charge to answer or provide timely follow-up to each participant. Each member defines their degree of commitment and participation in the activities. For this study, the MOOC: Mathematical Problem Solving and use of Digital Technologies was built, based on the frameworks: Problem Solving (Santos-Trigo, 2014) and RASE (Resources, Activities, Support and Evaluation) (Churchill, King, & Fox Churchill, 2016). Churchill, et al., (2016) argue that an online learning environment must include elements that allow its participants to work and collaborate in team with others. The activities must motivate the active participation of the students in a reflecting environment of discussion and focus in a context in which the tasks involve the students in the episodes of problem solving: formulation of questions, search for different solution methods, exploration of different representations, search for patterns, variables, and relations between mathematical objects, arguments representation, communication of results and formulation of new problems (Santos-Trigo, 2014). The systematic use of digital technologies is important in the representation, exploration, communication and understanding of mathematical concepts in problem solving (Santos-Trigo, Moreno-Armella, 2016).

In this study, it was interesting to analyze the design of the mathematical activities and the forms of mathematical reasoning of the participants related to: (1) the question formulation and the search for different ways to answer them (2) the formulation of conjectures based on the movement of mathematical objects and qualification of attributes, e.g. measure of segments, angles, areas etc. and (3) the search for arguments that validate those conjectures moving from the empiric and visual arguments to the geometric and algebraic arguments. In this way, the research question that guided the development of this study was: How does the design and implementation of activities in a MOOC based on problem solving and coordinated use of digital technologies influence the construction and development of the participants' mathematical thinking?

### Framework

The construction of the mathematical thinking is related to problem solving because it is a way that allows to identify, explore, test and communicate the solution strategies (Santos-Trigo, 2014; Schoenfeld, 1992). Diverse digital technologies offer the students different ways to represent and explore concepts and mathematical problems that extend those approaches based on the use of pen and paper (Santos-Trigo, 2014; Aguilar-Magallón & Poveda, 2017).

A Dynamic Geometry System (DGS) can be used to integrate the processes that are present in problem solving that allow to generate representations or dynamic models of the mathematical problems where the movement of particular objects (points, lines, segments, polygons, etc.) could be explored and explained in terms of mathematical relations. Hence, the systematic use of digital technologies is important in the representation, communication, and understanding of mathematical concepts in problem solving.

Churchill et al. (2016) argue that a model is needed for designing the activities that provides professors and researchers, guidelines to use digital technologies in the teaching and learning context. They propose the design model RASE, the Resources refer to the available materials for the students: videos, images, digital files, calculators, tools for the representation of mathematical situations, etc. The Activities must allow the students to be involved in the processes of discussion, analysis and reflection in collaboration with others.

The Support establishes that some means of consultation and communication must be included between the students, with the objective that they can get help or feedback at the moment that they need it and, in this way, to promote the independence from the professor or tutor. The Evaluation should encourage the improvement of the students' learning, therefore, it is necessary that when they express their ideas, they analyze the feedback received through support media, to refine or expand the initial concepts or ideas. In a MOOC the discussion forums become a mean of conversation between their participants and give them the opportunity of proposing, getting to know, contrast own ideas and those of others (Poveda & Aguilar-Magallón, 2017). Ernest (2016) argues that in the conversation are involved: a speaker/proponent, a listener/critic and a Mathematical Text. The speaker/proponent proposes an idea (Mathematical Text) and the listener /critic answers by giving his point of view, accepting or changing the original idea. After that, the speaker/proponent can assume the listener /critic role, in this way the roles are reversed.

### Methodology

The objective of the activities design of the course was to emphasize that the learning of mathematics requires problematizing or questioning the tasks or situations, thinking about different ways to solve a problem, understanding and using different representations, interpreting the solution and communicating the results. Through this process, the formulation of questions becomes a medium that allows the participants to build, develop, re-think or transform their ways to understand and solve problems. The Resources included representations or dynamic models of problems built in GeoGebra, links to the Wikipedia platform and the videos of KhanAcademy for the study of mathematical concepts and relationships.

The activities included three stages: 1) *Movement*: the participants had the opportunity to explore a dynamic model of a problem and the behaviour of some of its parts that results from the movement of other elements, 2) *Conjecture*: the objective is that from the movement, the participants will formulate conjectures that can be supported or refuted from visual or empirical arguments and 3) *Justification*: it was tried that all conjectures were justified through arguments that involved mathematical properties and results. The forum was used to give the participants

the possibility to propose their doubts and ideas to others as many times as needed. In this way, the students' work can be used as a reference point for others to take up or extend the ideas, contrast them and discuss them. In addition, in the forums the participants can receive feedback about their proposed ideas, it can be useful for the analysis and reflection as part of the Evaluation process.

### **Development of activities, participants and procedures**

The MOOC was built and implemented in the platform *Open edx* (<https://open.edx.org/about-open-edx>), it has a duration of seven weeks and it was composed by six activities. The only requirement for registration was that interested individuals had a minimum schooling level equivalent to grade 12. 2669 people signed up for the MOOC. At the beginning of the course, only Activity 1 was visible, Activity 2 was shown one week later and so on, without restricting access to the previous ones. During the seven weeks in which the course was available to the participants, the Design Group (DG) monitored the development of the activities and the participation in the forums. The work consisted in:

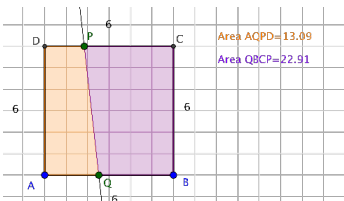
1. At the beginning of the activity, the comments were classified in four categories: answers to the questions that were proposed in each activity, approaches to problem solving (correct and incorrect), new questions asked by the members and proposals to extend the problem. Later, the comments with similar ideas were eliminated, two or three were chosen from each category and were placed in such way that they were shown at the beginning of the conversations, in this way the participants could give them priority in their analysis.
2. During the Activity, it intervened in the forums only when it was necessary to orient and extend the discussion. Questions from the participants were never answered directly, but some different questions were asked in order to generate more discussion and to allow the participants to find different ways to create the solution by their own.
3. At the end of the activity, questions were raised to promote the extension the topic and for the participants to look to extend the initial problems.

The data of this study were collected through the discussion forums. The unit of analysis were the conversations of the participants in each activity. At the end of the course, the design team analyzed the conversations. Interested to analyze and document how the activities design, the discussion and interaction between the participants and the actions that the design team took in the forum influenced in the development of the episodes of problem solving, according to the framework of the problem solving and the use of dynamic technologies of Santos-Trigo (2014).

### **Presentation of results**

One of the Activities proposed in the MOOC is discussed: Two farmers want to plant land that is shaped like a square. How to divide the land so each farmer can plant exactly the same area? The activity consisted in developing two solutions to the problem, in each one a dynamic model was given and a set of questions to guide the work of the participants. Chart 1 shows the stage in which the members of the MOOC had the opportunity to move the objects to look for relations or invariants and a summary of the conversations in the forum.

**Chart 1: The movement and the results of the dynamic exploration.**

The movement and the exploration	Results of the interaction in the forums
 <p><b>Movement:</b> When we move the points <math>A, B, P</math> &amp; <math>Q</math>, what happens with the areas of the regions? Where to place the points <math>P</math> and <math>Q</math> so that the areas of the <math>AQP D</math> &amp; <math>QBCP</math> regions are the same?</p>	<p>All the participants pointed:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. It is possible to move the point <math>P</math> and <math>Q</math> and obtain regions of same areas regardless of the size of the square side.</li> <li>2. The object movement and the measurement of the areas can give some solutions: <math>P = C</math> y <math>Q = A</math>; <math>P = D</math> y <math>Q = B</math> &amp; <math>PQ</math> perpendicular bisector of <math>DC</math>.</li> </ol> <p>In this part of the activity, the participants could not observe that a general solution is when <math>O \in PQ</math> (<math>O</math> is the square center).</p>

The next questions asked to the participants was: Is the center of the square and the position of the line that divides the land in regions of the same area important? All of them made their first conjecture based in visual and empiric arguments (measurement of the areas  $AQP D$  y  $QBCP$ ): “If  $O \in PQ$  then it divides the square into two figures of the same area”.

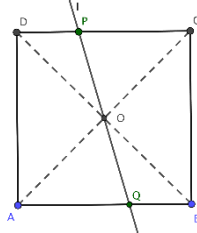
The DG asked: “How many solutions are there?” The answers agreed that there is an infinite number of solutions. In the search for a justification of the conjecture, the participants were asked: What concepts, properties and mathematical resources can be used to support the conjecture? In the conversations all of them pointed out the need to trace the diagonals of the square and use its properties (Justification 1, Chart 2).

The participant  $P_1$  presented a way to justify the conjecture: he built a dynamic model, answered the doubts of others and gave feedback to the people that could not understand the justification. (Justification 2, Chart 2).

The next section of the activity guided the participants in the exploration and searching of another solution, the details are showed in Chart 3.

Later, the members formulated the conjecture, the next section consisted in searching for mathematical relationships to justify it, therefore, in the dynamic model of the square the lines  $FH$  and  $EG$  were included. All the participants discussed and presented the Justification 1 that is shown in Chart 4.

**Chart 2: Resources and strategies of exploration and solution.**

Justifications	Resources and strategies of exploration and solution
<p><b>Justification 1</b></p> 	<p><b>Resources:</b> Properties of the square and its diagonals, angles between parallel lines, angles opposed by the vertex and congruence of triangles.</p> <p><b>Strategy:</b> Put <math>P</math> on the side <math>DC</math>, build the line <math>PO</math> and trace the diagonals of the square.</p> <p><b>Justification:</b> <math>\triangle DOP \cong \triangle BOQ</math> (SAS), so <math>DP = BQ</math>, therefore, the polygons <math>AQP D</math> y <math>QBCP</math> have equal area.</p>

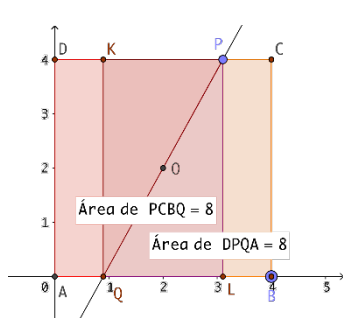
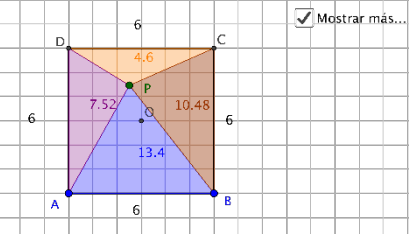
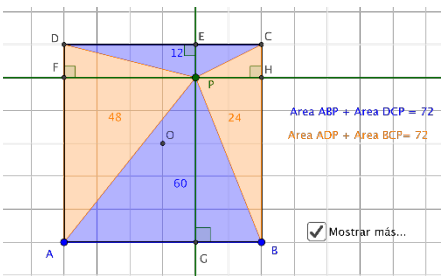
<p><b>Justification 2 of <math>P_1</math></b></p> 	<p><b>Resources:</b> Properties of the square, congruence of triangles, angles between parallel lines, properties of parallel lines and perpendicular lines.</p> <p><b>Strategy:</b> Placed <math>P</math> on <math>DC</math>, trace the <math>PO</math> line and build perpendicular lines to <math>DC</math> and <math>AB</math> that pass through <math>P</math> and <math>Q</math>, respectively.</p> <p><b>Justification:</b> <math>\triangle QKP \cong \triangle PLQ</math> (SAS) and the rectangles <math>AQKD</math> and <math>LBCP</math> are congruent (arguments are not given). Participants' questions in the forum: (1) <i>What happens if <math>P=C</math> &amp; <math>Q=A</math>?</i> <math>P_1</math>: "We have two congruent right triangles", (2) "¿How do you know that <math>AQ=PC</math>?" <math>P_1</math> reference Justification 1.</p>
---	--

Chart 3: Movement and exploration importance

Stages of the activity	Interaction in the forums
 <p><input checked="" type="checkbox"/> Mostrar más...</p> <p><math>P</math> is inside the square.</p> <p><b>Movement.</b> What regions can be assigned to the farmers so that each one can plant the same area?</p>	<p>Ten participants pointed out some solutions:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li><math>P</math> matches with any vertex, <math>P</math> is the central point of a side or <math>P</math> is the center of the square.</li> <li><math>P</math> belongs to a diagonal of the square or to the line that joins the middle points of <math>AB</math> and <math>DC</math>.</li> </ol> <p>In this part of the activity, none of the participants observed solutions based on the movement of objects, for instance, the solution is obtained for any position of point <math>P</math> inside the square.</p>
<p><b>Conjecture:</b> Is it possible to identify any relationship between the values of the areas? When varying the position of the point <math>P</math>, what happens to the sum of the areas of the triangles <math>ABP</math> and <math>CDP</math>?</p>	<p>All participants formulated and shared the conjecture: "If <math>P</math> is a point that is inside of the square, the sum of the areas of the opposite triangles is the half of the square <math>ABCD</math>". Some participants gave feedback to others, for example, someone mentioned: "<math>P</math> always generates four triangles", it was suggested: "Move point <math>P</math> in such a way that it matches with a vertex, or <math>P</math> over one of the sides".</p>

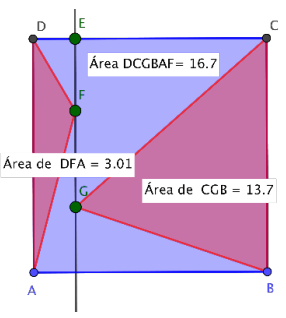
The Justification 2 of Chart 4 was built and shared by participant  $P_2$ . The other participants approved the ideas and built algebraic models as another way to support it.

Chart 4: Resources and strategies of exploration and solution.

Justification of the Solution 2	Resources, strategies and justification
 <p>What properties are important to present an argument that supports the conjecture? What properties have the triangles that are generated when we trace the perpendicular lines to the sides passing through the point P?</p>	<p><b>Resources:</b> Properties of parallel and perpendicular lines, congruence of triangles.</p> <p><b>Strategy 1:</b> Trace the perpendicular lines <math>EG</math> and <math>FH</math> to the sides of the square that pass by <math>P</math>.</p> <p><b>Justification 1.</b> <math>\triangle AGP \cong \triangle AFP</math> (SSS) and <math>\triangle GBP \cong \triangle HBP</math> (SSS), at the same time <math>\triangle CEP \cong \triangle CHP</math> &amp; <math>\triangle EDP \cong \triangle FDP</math>. Therefore, <math>\text{Area } \triangle DCP + \text{Area } \triangle ABP = \text{Area } \triangle BCP + \text{Area } \triangle ADP</math>.</p> <p><b>Strategy of <math>P_2</math>.</b> the sum of <math>\triangle AGP</math> and <math>\triangle DPE</math>, without taking into account the position of the point <math>P</math>, is constant and equal to <math>BC</math>.</p> <p><b>Justification of <math>P_2</math>:</b> The sum of the heights of <math>\triangle PCD</math> and <math>\triangle ABP</math> is equal to the sum of the heights of <math>\triangle DAP</math> y <math>\triangle BCP</math>, so, the four triangles have the same base and <math>\text{Area } \triangle PCD + \text{Area } \triangle ABP = \text{Area } \triangle DAP + \text{Area } \triangle BCP</math>.</p>

The DG asked in the forum: Is there another way to solve the problem? What other questions can you ask? The participant  $P_3$  revisited the ideas from Justification 2 of Chart 4 and built a dynamic model of the square with other solution (Justification 1 of the Chart 5). Other participants approved the ideas and discussed another way to support the conjecture (Justification 5 Chart 5).

Chart 5: Another Solution

Another solution	Resources, strategies and justification
	<p><b>Resources:</b> Properties of the parallels and perpendicular lines.</p> <p><b>Strategy:</b> Placed the mobile point <math>E</math> on <math>DC</math>, trace the perpendicular line <math>m</math> to <math>DC</math> that passes by <math>E</math>. Placed two mobile points <math>F</math> and <math>G</math> on <math>m</math>.</p> <p><b>Justification 1:</b> The sum of the heights of <math>\triangle AFD</math> and <math>\triangle BCG</math> is constant and equal to <math>AB</math> for all positions of <math>E</math>, <math>F</math> and <math>G</math>, therefore, <math>\text{Area } \triangle AFD + \text{Area } \triangle BCG</math> is half of the square's area.</p> <p><b>Justification 2.</b> Trace parallel lines to the sides that pass by the mobile points <math>F</math> &amp; <math>G</math> to generate congruent triangles.</p>

The Chart 6 shows two of the questions the participants formulated and the answers they found.



Chart 6: Extensions of the problem.

Formulated questions	Justification
<p><b>Extension 1</b>  <i>“How to divide the land into 4 regions with the same area?”.</i></p> <p>Muy interesante la forma de resolverlo, se me ocurrió la forma de dividir el cuadrado en 4 áreas iguales trazando la mediana de cada triángulo.</p> <p>. Al sumar las áreas de</p> <p>los triángulos de igual color se obtiene la división del terreno en 4 áreas iguales. Usé la propiedad de la mediana que garantiza que divide al triángulo en dos áreas iguales. ¿que opinan?</p>	<p>During the search for the answers, one participant used the property: Each median divides the area of the triangle in half.</p> <p>In this way, he built and presented a dynamic model similar to the one of the Solution 2 where he traced the medians of triangles (<math>DEI</math>, <math>EH</math>, <math>EG</math> &amp; <math>EF</math>). The sum of the areas of triangles <math>DEI</math> and <math>CGE</math> is a quarter of the square's area.</p>
<p><b>Extension 2</b>  <i>“Is it possible to determine a quadrilateral inscribed within any other such that it has half of its area?”.</i></p>	<p>The participants shared information of Wikipedia related to the theorem of Varignon: <i>The midpoints of the sides of an arbitrary quadrilateral form a parallelogram. If the quadrilateral is convex or concave, then the area of the parallelogram is half the area of the quadrilateral.</i></p>

### Discussion of the Results

The activity design guided the participants' work towards searching different ways to explore the dynamic models. Each model represented to the participants a starting point that allowed them to identify concepts, propose conjectures based on the movement of the mathematical objects present in the dynamic setting and their relationships or invariants.

The use of discussion forums helps the communication, analysis and the contrast of mathematical ideas, in addition, they allowed the participants to give and receive feedback from others. This was important for transiting from visual and empirical solutions (associated with the use of tools such as movement of objects within the setting, quantification of attributes as measures of segments, angles, areas, etc.) to the presentation of geometric and algebraic arguments in the validation of the formulated conjectures.

During the development of the course, the monitoring that the DG did in the classification of the comments helped the discussion, re-think of mathematical concepts and ideas and the episodes of problem solving. For example, the participants formulated conjectures, they presented arguments to justify them and also proposed new problems. The proposal of questions made by the DG helped the discussion of mathematical ideas, the proposal of new solutions and extensions of the problem. (See Chart 2, 5 and 6).

In addition, a group of participants assumed the role of giving feedback to the questions of other people, this promoted the collaborative work and fomented the independence of the participants in the construction process and the development of mathematical thinking.



### Conclusions

The results show that the different digital technologies used in this study and the integration of the components: Resources, Activities, Support and Evaluation based in problem solving allowed to create a collaborative work environment. The digital platform allowed the inclusion of dynamic representations of the problems elaborated in GeoGebra, in which the participants had the opportunity to explore, identify concepts, look for conjectures and different arguments to justify them. In this process, they used strategies associated with the use of the tool like object movement within the dynamic setting and the quantification of its attributes (lengths and areas). During the development of the Activities, a group of participants provided feedback to others, which helped to clarify ideas related to mathematical concepts, with the exploration of the dynamic model, with the formulation of conjectures and their justification. This allowed the participants to advance in the development and understanding of the activities in a collaborative way and without depending on a professor or tutor.

The actions taken by the DG in its interventions in the forums increased the discussions in three directions: (1) they helped the creation of working groups where the different episodes of problem solving were discussed, (2) led discussions and fomented the understanding of mathematical concepts and ideas and (3) allowed the participants to propose questions and look for answers, this led them to propose new solutions and extensions to the problem. It is important to recognize that during the design and implementation stage of a MOOC, participants should be expected to create an awareness that they themselves monitor their progress in understanding and using mathematical ideas in solving problems.

One factor to be considered in future work is the possibility for participants to build and present their own dynamic models of the problems, since, in this study, although it was not explicitly requested, some built and shared their dynamic constructions helping the discussion of ideas, the solutions and extensions for a problem.

### References

- Aguilar-Magallón, D. & Poveda, W. (2017). Problem Posing Opportunities with Digital Technology in Problem Solving Environments. In *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.
- Churchill, D., Fox, B., & King, M. (2016). Framework for Designing Mobile Learning Environments. In D. Churchill, B. Fox, & M. King (Eds.), *Mobile Learning Design, lecture Notes in Educational Technology* (pp. 3-25). Singapore: Springer.
- Gros, B. (2016). The Dialogue Between Emerging Pedagogies and Emerging Technologies. In B. Gros, Kinshuk, & M. Maina (Eds.), *The Future of Ubiquitous Learning Designs for Emerging Pedagogies* (pp. 3-24). Berlin Heidelberg: Springer.
- Santos-Trigo, M. (2014). *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos*. Segunda edición. México: Trillas, Asociación Nacional de profesores de matemáticas.
- Santos-Trigo, M., & Moreno-Armella, L. (2016). The Use of Digital Technology to Frame and Foster Learners' Problem-Solving Experiences. In *Posing and Solving Mathematical Problems* (pp. 189-207). Springer International Publishing.
- Poveda, W. & Aguilar-Magallón, D. (2017). Mathematical Problem Solving and Digital Technologies in a Massive Online Course. In *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.
- Schoenfeld A. (1992). Learning to think mathematically: Problem Solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-371.) New York: Macmillan.